**§ 4.2 Основні властивості графів**

***Частина I***

**а) *Основні теоретичні відомості.***

***Маршрутом*** (або ***шляхом***) у графі *G* =(*V*,*E* ) називається послідовність

*,*

вершин  і ребер  така, що кожні два сусідні ребра в цій послідовності мають спільну вершину, отже, , . Вершина називається ***початком*** шляху, а вершина  ***кінцем*** шляху. Всі інші вершини цього шляху називаються ***проміжними***, або ***внутрішніми***, вершинами.

Кількість k ребер у маршруті називається довжиною маршруту. Кажуть, що цей маршрут з’єднує вершини  і  або веде з вершини v1 у вершину .

Маршрутом довжини 0 вважається послідовність, що складається з єдиної вершини. Маршрут, в якому всі ребра попарно різні, називається ***ланцюгом***. Маршрут, в якому всі проміжні вершини попарно різні, називається ***простим ланцюгом***.

Маршрут (3.2) називається ***замкненим*** (або ***циклічним***), якщо . Замкнений ланцюг називається ***циклом***, а замкнений простий ланцюг  ***простим циклом***.

***Теорема 1.*** Будь-який маршрут, що веде з вершини *v* у вершину *w*, містить у собі простий ланцюг, що веде з *v* у *w*.

Граф, усі ребра якого утворюють простий цикл довжини *n*, позначається . Простий цикл довжини 3 називається ***трикутником***.

Граф називається ***зв’язним***, якщо будь-яка пара його вершин може бути з’єднана деяким маршрутом.

***Компонентою зв’язності*** (або ***зв’язною компонентою***) графа *G* називається його зв’язний підграф такий, що він не є власним підграфом жодного іншого зв’язного підграфа графа *G*.

***Відстанню*** між вершинами *v* і *w* зв’язного графа (позначається ) називається довжина найкоротшого простого ланцюга, що з’єднує вершини *v* і *w*. Оскільки кожна вершина графа  з’єднана сама з собою маршрутом довжини 0, то для всіх  виконується . Означена функція відстані задовольняє три аксіоми метрики, тобто для будь-яких вершин  виконується

1) ; тоді і тільки тоді, коли ;

2) ;

3) .

***Ексцентриситетом *** довільної вершини  зв’язного графа  називається найбільша з відстаней між вершиною *v* і всіма іншими вершинами графа , тобто .

***Діаметром*** зв’язного графа  (позначається ) називається максимальний з усіх ексцентриситетів вершин графа . Мінімальний з усіх ексцентриситетів вершин зв’язного графа  називається його ***радіусом*** і позначається .

Вершина *v* називається ***центральною***, якщо ******. ***Центром*** графа  називається множина всіх його центральних вершин.

Вершини *v* i *w* графа  називаються ***зв’язаними***, якщо в  існує існує маршрут, що з’єднує *v* і *w*.

***Теорема 2.*** Будь-який граф однозначно зображається у вигляді прямої суми своїх компонент зв’язності.

Якщо граф  зв’язний, то всі його вершини попарно зв’язані, тобто  i  має єдину зв’язну компоненту, яка збігається із самим графом .

***Теорема 3.*** Для будь-якого графа  або він сам, або його доповнення є зв’язним графом.

***Теорема 4***Якщо  незв’язний граф, то граф  зв’язний і .

Справді, якщо *G* незв’язний граф, то з доведення теореми випливає, що  зв’язний і для будь-яких двох вершин *v* та *w* графа  виконується або , або .

***Теорема 5.*** Нехай *G* =(*V*,*E*) зв’язний граф і *e*  деяке його ребро. Розглянемо граф *G*  , який отримано з *G* вилученням ребра *e*:

а) якщо ребро *e* належить деякому циклу графа *G*, то граф *G*   є зв’язним графом;

б) якщо ребро *e* не належить жодному циклу графа *G*, то граф *G*  не є зв’язним графом і має рівно дві компоненти зв’язності.

***Теорема 6.*** Нехай *G* =(*V*,*E* ) граф з *n* вершинами і *k* компонентами зв’язності. Тоді число його ребер *m* задовольняє такі нерівності: .

***Теорема 7****.* Довільний зв’язний граф з *n* вершинами містить не менше ніж *n*  1 ребро.

***Теорема 8****.* Якщо в графі *G* з *n* вершинами кількість ребер більша ніж (*n*  1)(*n*  2)/2, то граф *G* зв’язний.

***Цикломатичним числом*** графа називається число зв’язних компонент графа плюс число рёбер мінус число вершин.

***Ейлеровим*** називається цикл, який проходить по кожному ребру графа рівно один раз. Граф, який має ейлерів цикл, також будемо називати ***ейлеровим***.

***Теорема 9.* *(Критерій ейлеровості графа)*.** Зв’язний граф є ейлеревим тоді й тільки тоді, коли степені всіх його вершин – парні числа.

Ланцюг, який проходить по кожному ребру рівно один називають **е*йлеровими ланцюгом*.**

***Гамільтоновим*** називається цикл, який проходить по кожній вершині графа рівно один раз.

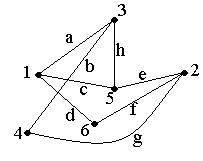
***б) Питання для самоперевірки***

1.Навести приклад графа, в якому існує простий ланцюг з вершини v1 в вершину v2 та з вершини v2 в вершину v3, але не існує простого ланцюга з v1 в v3 через v2.

2. Навести приклад графу, який є ізоморфним власному доповненню.

***в) Методичні вказівки до розв’язування задач***

1. Побудувати 2 маршрута з початком у вершині 2 і кінцем у вершині 2для даного графа.



*Розв’язок*. Побудуємо маршрути:

а) ,

б) .

2. Побудувати всі ланцюги для прикладу 1.

*Розв’язок.* Побудуємо ланцюги:

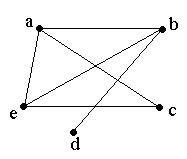
, , , , , , .

3. Знайти для даного графа:

а) радіус,

б) діаметр,

в) цикломатичне число.

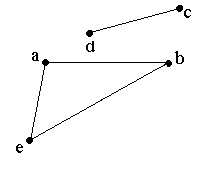


*Розв’язок.* За означенням, радіус , діаметр . Цикломатичне число дорівнює .

4. Граф задано матрицею суміжності. Знайти цикломатичне число.



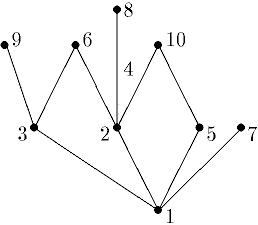
*Розв’язок.* Побудуємо діаграму графа.



За означенням, цикломатичне число дорівнює .

5. Побудувати граф, який показує відношення подільності на множині .

*Розв’язок*. Принцип побудови такий що якщо від одного числа до другого існує ланцюг, який веде вгору, тоді друге число ділиться на перше.



***Частина II***

***Задачі для самостійної роботи***

1. Підрахувати cкільки ребер в повному графі з  вершинами?

2. Довести, що зв'язний граф з  вершинами має не меньше ніж  ребро.

3. Довести, що якщо зі зв'язного графа видалити довільне ребро, що міститься у деякому простому циклі, то граф залишиться зв'язним. Чи вірно це для циклу, замкненого маршруту?

4. Довести, що кількість вершин непарної степені графа парна.

5. Довести, що у будь-якому графі з не меньш ніж 2 вершинами знайдуться дві вершини однакового ступеня.

6. Довести, якщо у графі з n вершинами (n≥2) тільки одна пара має однакову степінь, то у цьому графі завжди існує: або одна ізольована вершина, або одна вершина яка суміжна з всіма іншими.

***Частина III***

***Задачі підвищеної складності***

Довести, що у графі з  вершинами та  компонентами зв'язності кількість ребер не перевищує .

***Частина IV***

***Домашнє завдання***

1. Довести, що у зв'язному графі з n вершинами між довільними двома вершинами існує маршрут довжини не більше ніж .

2. Довести, що коли у графі G рівно дві вершини v та w мають непарні степені, тоді ці вершини є зв`язними у графі G.

3. Довести, що будь-який замкнений маршрут непарної довжини містить в собі простий цикл. Чи вірно це для маршрутів парної довжини.

4. Довести, що у зв'язному графі будь-які два простих ланцюги максимальної довжини мають що найменьше одну спільну вершину. Чи будуть вони завжди мати спільне ребро?

5. Довести, що для довільного графа або він сам, або його доповнення є зв'язним.

6. Довести, якщо у графа всі прості цикли мають парну довжину, то він не має жодного циклу непарної довжини.